15/04/2019
6η Διάλεξη

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_5]$

$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = 2x_1^2 x_4 - \underbrace{3x_1 x_2^3} + x_4^3 - 2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_5]$ (όχι ομογενές)

πολυώνυμο = άθροισμα όρων (κάθε όρος καλείται μονώνυμο)

$(\mathbb{T}^n = \{\lambda x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}\}$

$\downarrow \lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda \cdot x^u$

$u \in \mathbb{N}^n$

Π.χ. $2x_1^2 \cdot x_4$

$\downarrow$

$\lambda x^u$, όπου $u = (2, 0, 0, 1, 0)$

$-3 = \lambda$ και $u = (1, 3, 0, 0, 0)$

**Ορισμός**: α) Συνήθης βαθμός μονωνύμου $deg(x^u) = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ $u = (u_1, \dots, u_n)$

β) Ένα πολυώνυμο καλείται ομογενές αν όλοι του οι όροι (τα μονώνυμα του έχουν τον ίδιο βαθμό)

Π.χ. $\phi(x) = x_1^3 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$

**Ορισμός**: Ορίζουμε με $M(f)$ το πολυώνυμο που αποτελείται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του $f$ και με $E(f)$ το αντίστοιχο πολυώνυμο που αποτελείται από τους ελαχιστοβάθμιους όρους του $f$.

Π.χ. $\phi = \overset{3}{x_1^2 x_2} - \overset{4}{2x_1^3 x_4} + \overset{4}{x_1^4} - \overset{3}{x_2 x_3 x_5} + \overset{\boxed{2}}{3x_1^2} - \overset{\boxed{2}}{x_2 x_3} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_5]$

$M(f) = -2x_1^3 x_4 + x_1^4$

$E(f) = 3x_1^2 - x_2 x_3$

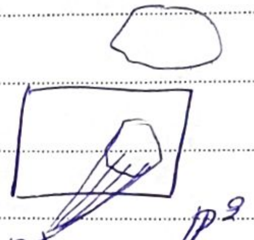
# Προβολικό Επίπεδο

**Σημεία:** $(x_1,y_1,z_1)$ (ευθείες που διέρχονται από την αρχή $(0,0,0)$)
αυτό εξαιρείται

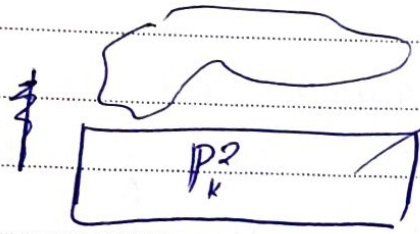
**Ευθείες:** Επίπεδα του $\mathbb{K}^3$ που διέρχονται από την κορυφή $(0,0,0)$

$$\boxed{ax+by+\gamma z=0}$$


**Καμπύλες:** κώνοι του $\mathbb{K}^3$ με κορυφή το $(0,0,0)$
(από ένα ομογενές πολυώνυμο ως προς $x, y, z$)




**Π.χ.** Δίνεται η καμπύλη $x^3-y^2x+2yx+y^2-10=0$
Να περιγραφεί στο προβολικό επίπεδο.




Ομογενοποίηση: Λέγεται η παρακάτω διαδικασία
οι καμπύλες είναι ομογενή πολυώνυμα ως προς $x,y,z$. "Προσθέτω" σε κάθε μονώνυμο του $f(x,y)$ τόσα $z$, όσα "λείπουν" ώστε $f(x,y) \to f(X,Y,Z)$ ομογενές

Διατηρώντας τον μέγιστο βαθμό του $f(x,y)$.

Μέγιστος Βαθμός μονωνύμων $= 3$

Άρα,

$$f(x,y,z)=x^3-y^2x+2yxz+y^2z-10z^3$$ η καμπύλη στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

# Εύρεση Καμπύλης στο Προβολικό Επίπεδο

$f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ με max βαθμό μονωνύμων $= d$

$\Rightarrow$ ομογενοποιώ κάνοντας τον τυχαίο όρο $ax^m y^n$ του $f(x,y)$
$\Rightarrow$ $a x^m y^n z^{d-(m+n)}$ (για όλους τους όρους του $f$)

και αντίστροφα (επιστρέφοντας στην καμπύλη από το προβολικό)
$F(x,y,z)=0 \Rightarrow$ απο-ομογενοποιώ θέτοντας $z=1$
$F(x,y,1)=f(x,y)$

Συνήθως, οι καμπύλες στο προβολικό είναι με κεφαλαία γράμματα.

Σημεία του προβολικού επιπέδου γενικά είναι της μορφής $(x,y,z)$

$\boxed{z \neq 0}$ ότι τ και αν έχω $(x,y,z)$ $\div z$ και θα προκύψει $(x,y,1)$ όπου με τη θεωρία τους υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία $(x,y)$ του $\mathbb{K}^2$

προβολικά σημεία $z \neq 0$ $\longleftrightarrow$ σημεία του $\mathbb{K}^3$ $(x,y,1)$ $\longleftrightarrow$ σημεία του $\mathbb{K}^2$

$\boxed{z=0}$ $\Leftarrow$ $(x,y,0)$
(καλούνται σημεία στο άπειρο)

- Τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ευθεία του προβολικού επιπέδου με εξίσωση $z=0$.
- Κάθε άλλη ευθεία $ax+by+\gamma z=0$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο το $(-b,a,0)$
- Υπάρχει ένα σημείο στο άπειρο για κάθε διεύθυνση των ευθειών του $\mathbb{K}^2$.

Παρατήρηση: Αν $(a_1, \beta_1, \gamma_1), (a_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{P}_K^2$ η ευθεία που διέρχεται από αυτά:
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Προσδιορισμός σημείων στο ∞

• δίνεται η $f(x,y)$
↓
ομογενοποίηση $F(x,y,z)$ (περνάω στην αντίστοιχη προβολική)
↓
σημεία στο ∞: $\underset{H(f(x,y))}{\underset{\shortparallel}{F(x,y,0)}} = 0$

Π.χ. Να βρεθούν τα σημεία στο ∞ για τις
α) $V(x^2-y^2+6)$
β) $V(x^2+y^2-1)$ $\subseteq \mathbb{C}[x,y]$
γ) $V(y-x^2)$

(α) $f(x,y) = x^2-y^2+6$
↓
Βήμα 1ο: $F(x,y,z) = x^2-y^2+6z^2$
Βήμα 2ο:
Θέτω $z=0$. Άρα, $F(x,y,0)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-y^2}_{H(f(x,y))}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm y \\ z=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{x=y} (1,1,0)$, $\xrightarrow{x=-y} (1,-1,0)$

Τόσα, όσο ο βαθμός του $H$

β) $f(x,y) = y - x^2$

Βήμα 1°: ομογενοποιώ

$F(x,y,z) = yz - x^2$

$\Downarrow$

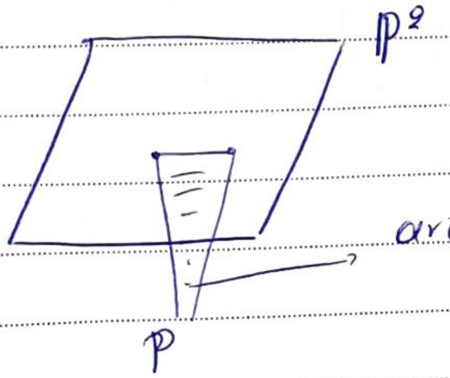
Βήμα 2°: $F(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(0,1,0)$ : Το σημείο στο άπειρο. Μοναδικό

(αντί για 1 βάζω ό,τι θέλω)
προσέχω που λύνει η καμπύλη

---

Είδαμε ότι η ευθεία στο $\mathbb{P}^2_k$




αντιστοιχεί σε επίπεδο στο $\mathbb{K}^3$

$ax + by + \gamma z = 0$

(διέρχεται από την αρχή $(0,0,0)$)

- Τομή δύο προβολικών ευθειών

Έστω $a_1x + b_1y + \gamma_1 z = 0$ διαφορετικές

$a_2x + b_2y + \gamma_2 z$

η τομή των αντιστοιχεί σε ευθεία του $\mathbb{K}^3$ καθώς πρόκειται για τομή επιπέδων

$$\{a_1x + b_1y + \gamma_1 z = 0 \;,\; a_2x + b_2y + \gamma_2 z = 0\}$$

Δύο διαφορετικές ευθείες του προβολικού επιπέδου πάντα τέμνονται
($\boxed{\text{Δεν}}$ υπάρχει η έννοια της παραλληλίας)

$a_1x + b_1y + \gamma_1 z$ διαφορετικές
$a_2x + b_2y + \gamma_2 z$

και έστω το σημείο:

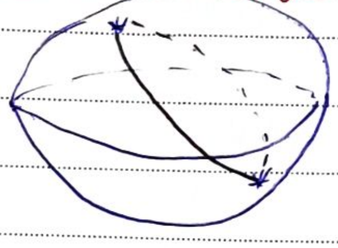
$$\left( \begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & a_1 \\ \gamma_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0)$$

(Αν ήταν το (0,0,0) με αντικατάσταση προκύπτει η ίδια ευθεία)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

(ορίζουσα με 2 ίδιες γραμμές)
(ομοίως και για την 2η ευθεία)
Άρα, κοινό σημείο τομής

## Μοντέλο Εφαρμογής $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$



$\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}} = \{$ 2βαθμιες καμπύλες $\}$

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta \quad \left(\begin{matrix}\text{γενική μορφή} \\ \text{2βαθμιες}\end{matrix}\right)$$

$$\downarrow$$

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + \gamma xy + \delta xz + \varepsilon yz + \zeta z^2$$

Για να περιγράψω όλες τις προβολικές 2βαθμιες καμπύλες αρκεί να προσδιορίσω $(a, b, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$ (εξαιρείται το $(0,0,0)$)

Ανάπτυγμα Taylor

Έστω $f \in \mathbb{R}[x]$ πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

και

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 3k^2 h\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + \dots\right)$$

Θα βρίσκουμε τις εφαπτόμενες σε σημεία της καμπύλης.